

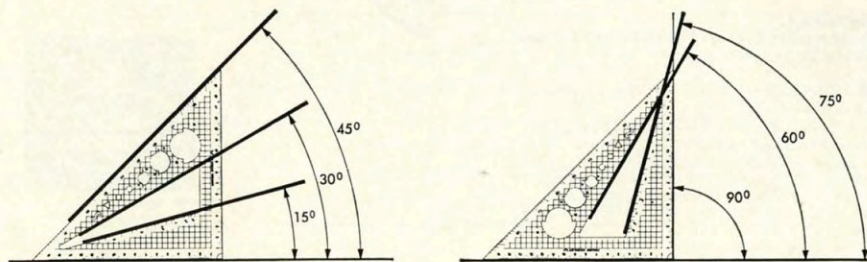


UNIVERSALZEICHENWINKEL Nr. 999

Der Universalzeichenwinkel ist das ideale Zeichengerät für rasches Zeichnen und Skizzieren an der Baustelle, in der Schule, daheim oder im Büro. Er ist äußerst vielseitig im Gebrauchsumfang und besitzt Einrichtungen zum Winkel- und Längen-messen, zum Koordinatenauftragen, zum Ziehen paralleler Linien und enthält gleichzeitig Schablonen für Ab- und Anrundungen sowie Bearbeitungszeichen. Außerdem ist an der 75°-Zeichenkante eine Normschriftskala vorgesehen. Durch Sondermarken innerhalb der Winkelskala ist auch ein rasches müheloses Zeichnen in axonometrischer Parallelperspektive ohne weitere Zusatzeinrichtung möglich. Mit dem am Zeichenwinkel chemografisch aufgetragenen Linienraster mit 5 mm-Teilung läßt sich jede Zeichenarbeit auf ungeteiltem Zeichenpapier genau so vorteilhaft und einfach wie auf kariertem- oder Diagrammpapier ausführen.

Durch diese vorbeschriebenen Einrichtungen des Universalzeichenwinkels ist man in der Lage, ohne umständlichen Gerätewechsel und daher auf kürzestem Wege alle wichtigen zeichnerischen Arbeiten durchzuführen.

Das Gerät dient dem Schüler genau so vorteilhaft wie dem in der Praxis stehenden Techniker oder Architekten und ist ein unentbehrliches Werkzeug des fortschrittlichen Zeichners.



Das Auftragen von Winkeln von 15 zu 15°

A. W. FABER - CASTELL · STEIN BEI NÜRNBERG

13
1969



Rechenstab-Brief

Berichte und
Anregungen
für das
Stabrechnen

Aus dem Inhalt

- Seite 3 Welche Verbesserungen bringt das neue Modell 2/83 N des Rechenschiebers Novo-Duplex gegenüber dem Modell 2/83
von Oberbaurat Dr. Fritz Heywang
- Seite 7 Die Auflösung kubischer Gleichungen mit Hilfe des Rechenstabes Novo-Duplex 2/83 N
von W. Ströher, Wien
- Seite 9 Der Rechenstab in der kristallographischen Praxis
von Dr. J. Robitsch



Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt
Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Copyright 1969 by A. W. FABER-CASTELL, Stein bei Nürnberg

Welche Verbesserungen bringt das neue Modell 2/83 N des Rechenschiebers Novo-Duplex gegenüber dem Modell 2/83

von Oberbaurat Dr. Fritz Heywang

Seit mehr als sechs Jahren wird der Rechenschieber „Novo-Duplex“ in unveränderter Form und Skalenanordnung angeboten und er hat sich in dieser Zeit viele Freunde erworben. Er ist der einzige Rechenschieber für den allgemeinen Gebrauch in Wissenschaft und Technik, der zur Erzielung einer höheren Rechengenauigkeit die Wurzelskalen trägt. Wer bei einem Rechenschieber die hohe Genauigkeit von 50 cm langen Skalen benötigt, dabei aber nicht auf die handliche Größe der Rechenschieber mit 25 cm Skalenlänge verzichten will, findet seine Wünsche nur beim Novo-Duplex erfüllt. Dieser Umstand begründete seine große Beliebtheit, so daß in der ganzen Zeit keine Veranlassung bestand, etwas an seiner Form oder Skalenanordnung zu verändern.

Wer allerdings einmal die hohe Genauigkeit der in je zwei Teilungen angeordneten Wurzelskalen hat schätzen lernen, der bedauert es, daß zwar die wichtigsten Rechnungen, nämlich alle Multiplikationen, Divisionen und logarithmischen Operationen, aber nicht alle wie z. B. die trigonometrischen und exponentiellen Operationen, mit der Genauigkeit von 50 cm langen Skalen ausgeführt werden können. Leider stößt die Erfüllung des Wunsches nach der größeren Genauigkeit bei allen Rechnungen auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Zu diesem Zweck müßten nämlich alle Skalen in der Mitte unterbrochen und ihre Länge auf je zweimal 25 cm ausgedehnt werden. Dadurch erhielte der Rechenschieber etwa die doppelte Zahl von Skalen. Abgesehen davon, daß dadurch die Übersichtlichkeit sehr beeinträchtigt wäre, müßte der Rechenschieber die doppelte Breite erhalten, wobei manche technische Schwierigkeit bei der Herstellung überwunden werden müßte. Auch die Herstellung eines Läufers von etwa 12 cm Breite, der leicht beweglich ist, dessen Linie aber nie um mehr als etwa 0,05 mm schräg verlaufen darf, würde wesentlich erschwert. Schließlich müßten solche Modelle einen Preis erhalten, der sich auf den Verkauf nicht günstig auswirken würde. Dieser Wunsch kann also in absehbarer Zeit nicht erfüllt werden.

Trotzdem hat sich die Firma Faber-Castell entschlossen, an dem Modell 2/83 manche Verbesserungen vorzunehmen und ein neues Modell 2/83 N auf den Markt zu bringen, selbstverständlich ohne irgend einen vom bisherigen Modell gebotenen Vorteil preiszugeben. Wodurch unterscheidet sich nun das neue Modell vom alten?

Zunächst fällt beim neuen Modell auf, daß bei ihm alle äußeren Abmessungen größer geworden sind. Die um 4 cm vergrößerte Länge ermöglicht die Erweiterung der Überteilungen aller Skalen, so daß das lästige Durchschieben der Zunge weitgehend vermieden wird. Besonders günstig sind die vergrößerten Überteilungen am unteren Ende der Sinus- und Tangensskala. Sie reichen jetzt bis 5° , während sie bisher bei $5,5^\circ$ endigten. Dadurch wird gerade der Bereich zwischen 4° und $5,5^\circ$, in dem der Ersatz des Sinus und des Tangens durch die Werte der Arcusskala etwas ungenau war, um das Drittel verkürzt, in dem sich die entstehende Ungenauigkeit am stärksten auswirkte. Die Zunge wurde sogar um 5 cm verlängert und ragt dadurch in Null-Stellung rechts und links etwas über den Stabkörper heraus. Dadurch gibt es keine Stellung mehr, in der beide Zungenenden schwer zugänglich sind, so daß man sie schwer einstellen könnte. Schmale, eingelassene Gummistreifen auf beiden Seiten der Verbindungsbügel geben dem Rechenschieber beim Arbeiten auf dem Tisch eine bessere Auflage als die früheren Gummikappen.

Entscheidend für das neue Modell ist aber die größere Breite des Rechenschiebers, die bewirkt, daß auf ihm jetzt 30 Skalen (statt bisher 24) Aufnahme finden konnten. Auf der Vorderseite treten zwei x^2 -Skalen in Erscheinung. Da sich — wie schon oben bemerkt — ein vollständiger Übergang zu doppelt unterteilten Skalen nicht ermöglichen läßt, muß ein Teil der Rechnungen ihren Ausgangspunkt bei den normalen x -Skalen nehmen. Wenn dabei Zwischenergebnisse quadriert werden und mit solchen Quadraten noch weitere Rechenoperationen ausgeführt werden sollten, war es bisher störend, daß auf dem alten Modell keine zugehörigen Quadratskalen vorhanden waren. Bisher mußte in solchen Fällen die Rechnung unterbrochen werden: Man las den ins Quadrat zu nehmenden Wert ab, stellte ihn auf der Wurzelskala ein und erhielt das Quadrat durch den Übergang auf die Grundskala. Dadurch wurde zwar die Genauigkeit der Grundskalen erhalten (während sie bei den neuen Quadratskalen etwas geringer ist), der Rechengang war aber wegen der nötigen Unterbrechung umständlicher. In Zukunft wird sie nicht mehr nötig sein, wie das Beispiel 1 zeigt.

- (1) Wie groß sind die Hypotenusenabschnitte in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $c = 8,62$ cm und dem Winkel $\alpha = 38,2^\circ$?

Zur Berechnung dienen die Gleichungen:

$$p = c \cos^2 \alpha, \quad q = c \sin^2 \alpha$$

Läufer auf D 10

B 8,62 unter den Läufer

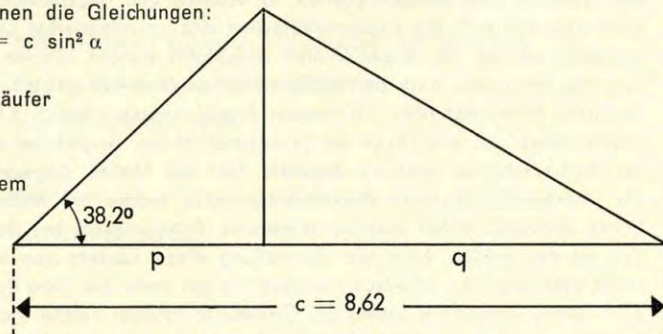
Läufer auf S $38,2^\circ$

1. Ergebnis unter dem

Läufer auf B:

$$p = 3,30 \text{ cm}$$

Läufer auf S $51,8^\circ$



2. Ergebnis unter dem Läufer auf B: $q = 5,32$ cm

$$\text{Probe: } p + q = 3,30 \text{ cm} + 5,32 \text{ cm} = 8,62 \text{ cm} = c$$

Diese Rechnung wäre auf dem bisherigen Modell nicht in dieser Kürze auszuführen gewesen, weil mangels der x^2 -Skalen ein unmittelbares Multiplizieren mit $\sin^2 \alpha$ bzw. $\cos^2 \alpha$ nicht möglich gewesen wäre.

Gleichzeitig ist durch den Übergang von den Wurzelskalen zur x^2 -Skala die Möglichkeit gegeben, eine 4. Potenz unmittelbar abzulesen. Dies wird zwar nur selten benötigt; das 2. Beispiel zeigt aber doch eine Rechnung, bei der dies wertvoll ist.

- (2) Berechne das polare Flächenträgheitsmoment eines kreisförmigen Trägerquerschnitts mit $d = 72$ mm = 7,2 cm.

Das Flächenträgheitsmoment berechnet sich nach der Formel:

$$J = \frac{r^4 \pi}{2} = \frac{d^4 \pi}{32}$$

Läufer auf W_2 7,2

B 32 unter den Läufer

Läufer auf B π

$$\text{Ergebnis unter dem Läufer auf A: } J = 264,0 \text{ cm}^4$$

Hier konnte d unmittelbar in die 4. Potenz erhoben und anschließend die Multiplikation mit $\pi/32$ auf den beiden x^2 -Skalen ausgeführt werden, was bisher ohne diese Skalen nur wesentlich umständlicher möglich gewesen wäre.

Auf der Vorderseite ist noch eine feste reziproke Skala aufgenommen worden. Beispiel 3 zeigt, wie auch dadurch manche Rechnung vereinfacht werden kann.

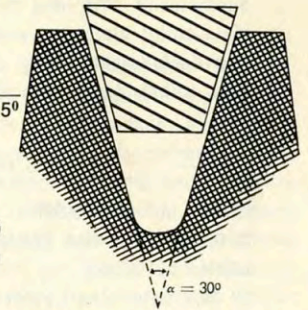
- (3) Wie groß ist der Klemmfaktor eines Keilriemens mit dem Keilwinkel $\alpha = 30^\circ$?

$$\text{Zur Berechnung dient die Formel } f = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin 15^\circ}$$

Läufer auf S 15°

$$\text{Ergebnis unter dem Läufer auf DI: } f = 3,86$$

Die Reibung des Keilriemens ist also 3,86 mal so groß als die eines entsprechenden Riemens mit rechteckigem Querschnitt.



Beim bisherigen Modell hätte man zuerst die Zunge auf Grundstellung bringen und die reziproke Skala CI zu Hilfe nehmen müssen.

Die Rückseite hat jetzt nicht mehr bloß sechs, sondern acht Skalen der e -Funktionen. Neu hinzugefügt wurden die Skalen $e^{+0,001 x}$ und $e^{-0,001 x}$. Damit kann man nun auch bei kleinen Exponenten, bei denen bisher e^x genähert durch $1 + x$ ersetzt werden mußte, die Exponentialfunktion unmittelbar mit voller Genauigkeit ablesen. Anwendungen dafür zeigen die folgenden Beispiele 4 und 5.

- (4) In einem elektrischen Schwingkreis befindet sich eine Spule mit der Induktivität $L = 0,5$ H und eine Kapazität $C = 1000$ pF. Um wieviele % nimmt die Amplitude der Schwingung in diesem Kreis während einer Schwingungsdauer ab, wenn der gesamte Ohmsche Widerstand des Kreises $R = 30 \Omega$ beträgt.

Die Schwingungsdauer findet man aus $T = 2\pi \sqrt{LC}$ und den Dämpfungsfaktor aus $q = e^{-R/L}$. Daraus ergibt sich die gesuchte relative Amplitudenabnahme während einer Schwingungsdauer zu:

$$q = e^{-\frac{R}{2L} 2\pi \sqrt{LC}} = e^{-R\pi \sqrt{\frac{C}{L}}} = e^{-30\pi \sqrt{\frac{10^{-9}}{0,5}}} = e^{-\frac{0,003\pi}{\sqrt{5}}}$$

Läufer auf D 3

B 5 unter den Läufer

Läufer auf C π

$$\text{Ergebnis unter dem Läufer auf LL}_{00}: q = 0,99579$$

Die Abnahme beträgt also während einer Schwingung 0,421%.

Der Exponent muß ausgehend von der normalen Grundskala berechnet werden. Weil in ihm die Wurzel $\sqrt{5}$ vorkommt, benötigt man auch die x^2 -Skala, um den Exponenten ohne Unterbrechung ausrechnen zu können, und erhält schließlich das Ergebnis unmittelbar auf der LL_{00} -Skala. Ohne die x^2 -Skala und die neue LL_{00} -Skala wäre die Rechnung wesentlich umständlicher gewesen.

Das Beispiel 5 zeigt ebenfalls eine Anwendung der doppeltlogarithmischen Skalen, diesmal jedoch zum Ablesen des natürlichen Logarithmus.

- (5) In einer Dickenmeßanlage wird eine Folie, deren Dicke gemessen werden soll, mit einem Präparat des Radionuklids Thallium Tl 204 (Halbwertszeit $t_h = 3,8$ Jahre) durchstrahlt. Wie lang darf ein Meßfehler infolge der Abnahme der Strahlung unberücksichtigt bleiben, wenn er 2^{0/100} nicht überschreiten soll?

Der Zerfallsfaktor $q = e^{-0,693 t/t_h}$ soll nicht kleiner als 0,998 werden. Die längste Zeit, während der man die Einstellung nicht nachkorrigieren muß, erhält man daher aus:

$$t = - \frac{t_h}{0,693} \ln 0,998 = \frac{-3,8 \cdot 365 \text{ d}}{0,693} \ln 0,998$$

Läufer auf LL₀₀ 0,998

C 0,693 unter den Läufer

Läufer auf C 3,8

CI 365 unter den Läufer

Ergebnis unter C 10 auf D: $t = 4,0 \text{ d}$

Die Anlage benötigt also 4 Tage keine Korrektur wegen der Abnahme der Aktivität des Strahlers.

Diese Aufgabe wäre praktisch mit derselben Genauigkeit auch ohne die LL₀₀-Skala mit dem Näherungswert $\ln 0,998 = -0,002$ lösbar gewesen.

Eigentlich wurde statt der $e^{0,001 x}$ -Skala eine einfache x -Skala aufgenommen. Sie wurde aber so zweckmäßig beschriftet, daß sie zugleich als $e^{0,001 x}$ -Skala verwendet werden kann, da sich die Teilstriche einer x -Skala praktisch nicht von dieser Exponentialskala unterscheiden. Diese feste x -Skala auf der Rückseite stellt für das Rechnen mit den Exponentialfunktionen eine große Annehmlichkeit dar. Jetzt braucht man zum Ablesen der e -Funktionen nicht mehr den Stab umdrehen und die Grundskala der Vorderseite zu Hilfe nehmen oder die Zunge auf ihre Grundstellung zu bringen, um die dort angebrachte x -Skala zu verwenden. Von dieser Grundskala aus kann man zu jedem Exponenten unmittelbar die zugehörige e -Funktion ablesen. Das Zusammenwirken dieser festen Grundskala, der beweglichen Grundskala und der neuen reziproken Skala auf der Zunge ermöglicht es, zusammengesetzte Exponenten auszurechnen und anschließend gleich die zugehörige e -Funktion abzulesen. Als Veranschaulichung dafür möge das Beispiel 6 dienen.

- (6) Eine Stahlplatte von der Dicke $s = 2,4 \text{ cm}$ und der Dichte $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$ wird von der γ -Strahlung des Radionuklids Kobalt Co 60 (Massenabsorptionskoeffizient für die Energie 1,33 MeV: $\mu_m = 0,052 \text{ cm}^2/\text{g}$) getroffen. Auf welchen Bruchteil vermindert sich die Strahlung beim Durchgang durch die Platte?

Der Absorptionsfaktor ist $q = e^{-\mu_m \rho s} = e^{-0,052 \cdot 7,8 \cdot 2,4}$

Läufer auf D (gleichzeitig LL₀-Skala) 5,2

CI 2,4 unter den Läufer

Läufer auf C 7,8

Ergebnis unter dem Läufer auf LL₀₂: $q = 0,378$

Die Strahlung wird also auf etwa 38% vermindert.

Der Exponent ließ sich nur durch Verwendung der drei auf der Rückseite angebrachten Skalen x (fest, x (beweglich) und $10/x$ ohne irgend eine Zwischenablesung ausführen. Natürlich hätte man auch die entsprechenden Skalen der Vorderseite verwenden können. Die Übersicht ist jedoch besser, wenn man den Rechenschieber nicht umdrehen muß.

Die Auflösung kubischer Gleichungen mit Hilfe des Rechenstabes Novo-Duplex 2/83 N

von W. Ströher, Wien

Bekanntlich kann der Rechenstab in vorteilhafter Weise zur Lösung kubischer Gleichungen herangezogen werden. Die bisher übliche Methode läßt die Zunge des Stabes fest und erfordert nur Bewegungen des Läufers, setzt aber das Vorhandensein einer rückläufigen Skala voraus (siehe den Aufsatz von Ing. H. Bachmann im Rechenstabbrief Nr. 2). Diese Methode läßt sich daher wegen der andersartigen Skalenanordnung beim Rechenstab-Modell „Novo-Duplex 2/83 N“ nicht anwenden. Das Verfahren von H. Bachmann im Rechenstab-Brief Nr. 11 eignet sich für das genannte Modell, erfordert aber während der Rechnung Zungenbewegungen. Der Verfasser schlägt nun zur Lösung von kubischen Gleichungen mit Hilfe des „Novo-Duplex“ folgendes Verfahren vor, das sich in seiner Praxis bewährt hat:

Nachdem man die kubische Gleichung

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

durch die übliche Substitution $z = x - \frac{a_1}{3}$ auf die reduzierte Form

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (1)$$

gebracht hat, werde auf (1) die Substitution

$$x = \frac{1}{y} \quad (2)$$

ausgeübt. Die Gleichung

$$y^3 + Ay^2 + B = 0$$

mit $A = \frac{a}{b}$ und $B = \frac{1}{b}$ läßt sich dann auf die für den „Novo-Duplex“ geeignete Form

$$y + \frac{B}{y^2} = -A$$

bringen. Mit Hilfe des Einstellschemas

$$\begin{array}{c|c} W & 1 \\ \text{CI oder CIF} & B \end{array} \quad \begin{array}{c} y \\ \frac{B}{y^2} \end{array}$$

lassen sich zusammengehörige Werte y und $\frac{B}{y^2}$ durch Probieren leicht so ermitteln, daß ihre Summe $-A$ ergibt. Aus (2) kann man dann die gewünschte Lösung x der ursprünglichen Gleichung (1) errechnen.

Beispiel: $x^3 - 4,5x + 2 = 0$

Die angedeuteten Umformungen liefern $y^3 - 2,25y^2 + 0,5 = 0$.

Die Rechenschieberform dieser Gleichung lautet dann

$$y + \frac{0,5}{y^2} = 2,25.$$

Läßt man die CIF-Skala mit der W-Skala zusammenarbeiten, so findet man leicht durch Probieren

W	.	.	.	y	0,541	
CIF	.	.	.	$\frac{0,5}{y^2}$	1,709	$y_1 = 0,541, x_1 = 1,85$
Summe	.	.	.	2,25	2,250	

W	. . . y	2,141
CIF	. . . $\frac{0,5}{y^2}$	0,109
Summe	. . . 2,25	2,250

$$y_2 = 2,141, x_2 = 0,467$$

W	. . . y	— 0,43	— 0,44
CIF	. . . $\frac{0,5}{y^2}$	2,70	2,58
Summe	. . . 2,25	2,27	2,14

$$y_3 = -0,43$$

$$x_3 = -2,3$$

Der zuletzt gefundene Wert läßt sich durch Probieren kaum verbessern, da einer 3. Stelle auf der W-Skala keine mit gleicher Sicherheit ablesbare Stelle der CIF-Skala entspricht, so daß man bloß sagen kann, daß y_3 näher $-0,43$ als $-0,44$ liegt.

Eine weitere Stelle läßt sich jedoch ermitteln, wenn man annimmt, daß die zur Funktion

$y + \frac{0,5}{y^2} = f(y)$ inverse Funktion zwischen den y -Werten $-0,43$ und $-0,44$ linear interpolierbar ist. Aus $\Delta = 214 - 227 = -13$ und $\Delta_1 = 225 - 227 = -2$ folgt

$$y_3 = -0,43 - \frac{\Delta_1}{100 \Delta} = -0,432, \text{ daher } x_3 = -2,32.$$

Dieser Kunstgriff liefert fast immer mindestens eine zusätzliche richtige Stelle. Die Anwendung auf y_1 und y_2 ergibt

y	0,540	0,542
$\frac{0,5}{y^2}$	1,715	1,702
2,25	2,255	2,244
$\Delta = -11, \Delta_1 = -5$		
$y_1 = 0,5409, x_1 = 1,849$		

y	2,1400	2,1500
$\frac{0,5}{y^2}$	0,1092	0,1082
2,25	2,249	2,2582
$\Delta = 90, \Delta_1 = 8$		
$y_2 = 2,1409, x_2 = 0,46709$		

Hier wurde der Kehrwert von y_1 mit der W-Skala berechnet, der von y_2 ohne Rechenschieber, um bei x_2 keine Stellen einzubüßen. Im Besitz der viel genaueren Werte von x_1 und x_2 kann man nun wegen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ einen um eine Stelle besseren Wert für $x_3 = -2,316$ angeben.

(Genauere Rechnung, etwa nach Newton, liefert: $x_1 = 1,84885, x_2 = 0,46709, x_3 = -2,31594$.)

Der Rechenstab in der kristallographischen Praxis

von Dr. J. Robitsch

Man weiß kaum, daß nicht nur in wissenschaftlichen Instituten, sondern auch im Edelmetallwerk täglich praktische Kristallographie betrieben wird. Bei der routinemäßigen Materialuntersuchung müssen laufend die Gitterkonstanten bekannter Phasen nachgemessen werden, um den Einfluß der Legierungselemente und der Wärmebehandlung verfolgen zu können, oder es müssen unbekannte Phasen überhaupt erst indiziert und bestimmt werden.

Der Rechenstab ist dabei nicht nur ein willkommenes und meist ausreichendes Hilfsmittel für das Zahlenrechnen, er ist vor allem ein unentbehrliches Werkzeug zum raschen und genauen graphischen Bestimmen der Gitterkonstanten und für die Indizierung kubischer Phasen. Für die Bestimmung wirteliger Phasen ist er überhaupt das einzige rationell einsetzbare Werkzeug. Man arbeitet mit dem 50 cm-Stab, oder dem Modell Castell Novo-Duplex 2/83 N.

Man gewinnt bei Röntgenbeugungsaufnahmen von vielkristallinen Proben oder Pulverpräparaten (die wir hier allein behandeln) eine Reihe von Netzebenenabständen d , die man unmittelbar aus den Beugungswinkeln (oder „Glanzwinkeln“) nach der Bragg-Gleichung $n \lambda = 2 d \sin \theta$ errechnen, oder besser aus Tabellen oder Strichdiagrammen abnehmen kann. Darin bedeutet λ die Wellenlänge der verwendeten Röntgenstrahlung, θ den Beugungswinkel oder „Glanzwinkel“, der zum normalen Reflexionswinkel der geometrischen Optik komplementär ist, und schließlich n einen Ordnungsfaktor, der normalerweise als 1 gesetzt wird, also wegfallen kann.

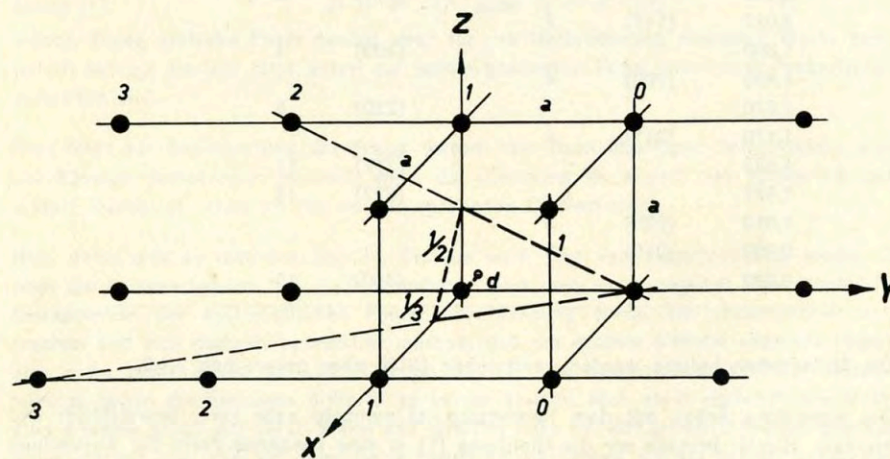


Abb. 1 Netzebene (312), gesprochen 3,1,2
 Achsenabschnitte: $\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}$
 Miller'sche Indizes 3,1,2, allgemein (hkl)
 Netzebenenabstand $d = a / \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$
 gemessen werden d Werte, gesucht a (und hkl)

Diese Reihe der d-Werte oder Netzebenenabstände steht nun mit den sogenannten Miller'schen Indizes h, k, l der Netzebenen, die deren Lage im Kristallgitter kennzeichnen, nach dem räumlichen pythagoräischen Lehrsatz in Beziehung

$$1/d^2 = 1/a^2 \cdot (h^2 + k^2 + l^2) = Q' \cdot 1/a^2$$

Darin bedeutet a die Abmessung der Elementarzelle, die sogenannte Gitterkonstante, und h, k, l die Kehrwerte der Achsenabschnitte der betreffenden Netzebene lt. Abb. 1. Hier wird nun der Rechenschieber eingesetzt, indem man die Reihe der d-Werte in eine passende Proportion mit der Reihe der Q'-Werte bringt, d. h. sie auf dem Rechenschieber entsprechend übereinanderstellt. In Tabelle 1 haben wir zwei solche Reihen von Q'-Werten der Reihe der gemessenen d-Werte gegenübergestellt, die demnach einem Gemisch von zwei Phasen entspricht. Man beachte vor allem, daß die Reihe der Q'-Werte stets eine Reihe von kleinen ganzen Zahlen ist, die meist zu keinen Mehrdeutigkeiten Anlaß gibt, so daß man aus einem Q'-Wert meist schon alle drei Indizes bestimmen kann.

Tabelle 1

Netzebenenabstände d, Miller'sche Indizes h, k, l und Q'-Werte ($h^2 + k^2 + l^2$) für ein Gemisch aus Alpha-Fe (kubisch raumzentriert) und Gamma-Fe (kubisch flächenzentriert).

d	hkl	Q'	hkl	Q'
gemessen	Alpha-Fe	($h^2 + k^2 + l^2$)	Gamma-Fe	($h^2 + k^2 + l^2$)
	a = 2,86 Å		a = 3,60 Å	
2,080			(111)	3
2,027	(110)	2	(200)	4
1,800	(200)	4	(220)	8
1,433				
1,270	(211)	6	(311)	11
1,170			(222)	12
1,083				
1,037	(220)	8		
1,013	(310)	10		
0,906			(400)	16
0,900				

Die Miller'schen Indizes werden geschrieben (310) aber gesprochen 3,1,0.

Die eigentliche Arbeit mit dem Rechenstab ist nunmehr sehr kurz, übersichtlich und ergiebig. Hierfür bringen wir die Gleichung (1) in eine passende Form zur Aufstellung der vorhin erwähnten Proportionen

$$1 : Q' = 1/a^2 : 1/d^2 \quad (1)$$

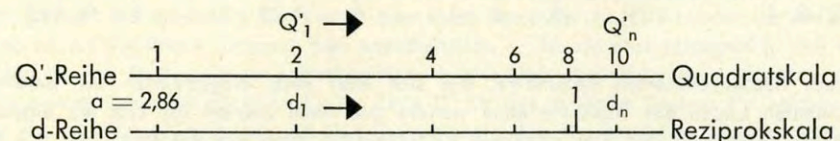
und als Proportion

$$1 : Q'_{1 \dots n} = 1/a^2 : 1/d^2_{1 \dots n} \quad (1)$$

was auf dem Rechenstab folgendermaßen darzustellen ist:

1 zu $Q'_{1 \dots n}$ auf der Quadratskala
 = (prop) $1/a^2$ zu $1/d^2_{1 \dots n}$ lt. Gleichung (1)
 entspricht $1/a$ zu $1/d_{1 \dots n}$ auf der Normalskala
 und Marke „a“ zu „d“ $1 \dots n$ auf der Reziprokskala

d. h., wenn man die Marken $d_{1 \dots n}$ auf der Reziprokskala einstellt und unter eine passende einfache Reihe ganzer Zahlen auf der Quadratskala stellt, so kann man unter der Marke 1 der Quadratskala unmittelbar das a auf der Reziprokskala ablesen (siehe Abb. 2). — Technisch wird das so durchgeführt, daß man die Reihe $d_{1 \dots n}$ von der



Reziprokskala auf einen Papierstreifen abträgt und diesen unter der Quadratskala so lange verschiebt, bis eine einfache ganze Zahlenreihe paßt. Richtig ist immer die Reihe kleinster ganzer Zahlen, also hier z. B. 2, 4, 6 und nicht 4, 8, 12 usw. Die ebenfalls mögliche noch einfachere Reihe 1, 2, 3, 4, 5 würde hier zwar mathematisch stimmen, stimmt aber kristallographisch nicht, wenn man weitere Indizes dazunimmt, weil sie einer niedrigeren Symmetrie entsprechen würde, bzw. einem kleineren Atomradius, was aber stets bald geklärt ist.

Es könnte noch die Frage auftauchen, warum man nicht die einfachere Form der Gleichung (1)

$$a^2 = d^2 \cdot Q' \quad \text{oder} \quad a = d \cdot \sqrt{Q'} \quad (1)$$

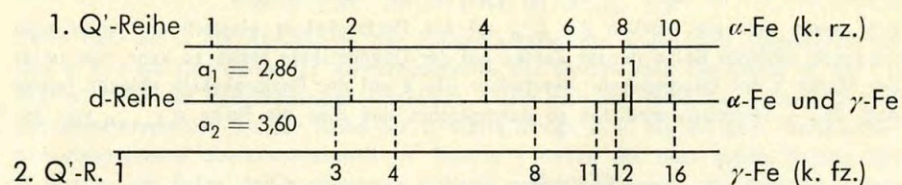
nimmt. Diese einfache Form genügt zwar für die Nachrechnung einzelner Werte usw., jedoch versagt sie und führt sofort zur vorhin genannten Form, wenn man Proportionen aufstellen will.

Dies führt zur Beantwortung der Frage, warum man denn überhaupt Proportionen, also überflüssige Beziehungen aufstellt, wenn die Gleichung für a doch aus einem einzigen d-Wert lösbar ist, wenn ich nur den entsprechenden Q'-Wert weiß.

Nun, dafür gibt es mehrere Gründe. Erstens weiß man von vorneherein ja weder Q' noch die entsprechenden h, k, l. Zum anderen führt man meist zugleich eine graphische Extrapolation der systematischen Fehler der Messung durch, die unvermeidlich auftauchen und sich dadurch bemerkbar machen, daß die großen d-Werte ungenau liegen, also nicht mehr genau auf die Q'-Reihe passen. Die systematischen Fehler werden nämlich gegen die kleinsten d-Werte zu immer kleiner. Man stellt demnach die kleinsten d-Werte genau auf die Q'-Werte und toleriert links bei den großen d-Werten gewisse Abweichungen, die alle auf einer Seite liegen sollen. Liegen sie auf beiden Seiten der Q'-Werte, so handelt es sich um eine Zufallsstreuung.

Weiters benötigt man eine gewisse Sicherheit für die Bestimmung, eine sogenannte Redundanz oder Überbestimmung, weil die Linien oft mangelhaft, breit verschwommen oder gestört sind, oder auch fremde Linien, die nahe bei den gesuchten liegen, dazukommen.

Dafür kann man aber auch Phasengemische mit dieser Methode sehr gut trennen (siehe Abb. 3). Hier kommt zum Alpha-Fe der Abb. 2 noch eine Serie von Beugungslinien des



kubisch flächenzentrierten Gamma-Fe, die sich aber nach Wegstreichen der bereits bestimmten Linien des Alpha-Fe ohne weiters und ohne Zweifel für sich als eigene Q'-Reihe bestimmen läßt. Der erfahrene Kristallograph sieht aus der Reihe der h, k, l-Indizes (die mit (111) beginnen und anders ablaufen als beim Alpha-Fe) sofort, daß es sich um eine Struktur mit Flächenzentrierung handelt. Die Nachrechnung ergibt dann auch einen Atomdurchmesser für das Eisen in beiden Strukturen oder Modifikationen, der fast genau gleich groß ist (wodurch eben auch die Reihe 1, 2, 3, 4, 5 beim Alpha-Fe zu Gunsten der Reihe 2, 4, 6, 8, 10 auszuschließen ist).

Die Indizierung wirteliger Phasen.

Es sei noch ein kurzer Absatz über die Bestimmung wirteliger, d.h. tetragonaler und hexagonaler Phasen gestattet, weil hier ohne Rechenstab überhaupt keine Möglichkeit besteht, rationell aus einem Pulverpräparat, das sonst keine kristallographischen Daten erkennen läßt, die Indizierung abzuleiten. Das Problem wird hier wesentlich komplizierter, weil statt der einfachen und klaren graphischen Beziehung der Abb. 2 und 3 eine zweite Unbekannte auftritt, nämlich c, bzw. c/a. Die Reihe der gemessenen d-Werte steht nunmehr in folgender Beziehung zu den Indizes der Netzebenen und zu den Gitterkonstanten a und c

$$1/d^2 = 1/a^2 \cdot (h^2 + k^2) + a^2 l^2/c^2 \quad (2)$$

Dabei stehen zwar die Achsen des Kristallsystems noch senkrecht aufeinander, jedoch ist die Gitterkonstante in Richtung Z nicht mehr gleich groß wie in Richtung X und Y. Diese Formel gilt nur für das tetragonale System, das wir hier allein als Beispiel anführen. Für das hexagonale System gelten ähnliche Formeln.

Diese Gleichung (2) läßt sich mit Gleichung (1) vergleichen, wenn man für a/c einen beliebigen Wert annimmt und einsetzt. Der Klammerausdruck rechts wird dann wiederum eine Konstante ähnlich dem Q' aus Gleichung (1) und die Variation über verschiedene (einfache und ganze) h, k, l ergibt eine Zahlenreihe, auf die wiederum die d-Werte passen müssen, wenn man sie nach Abbildung 2 und 3 reiht. Nur sind hier die Zahlen nicht mehr Ganze, sondern Dezimalzahlen und die Möglichkeiten beschränken sich nicht mehr allein auf die einfache Vielfalt der Reihe der Quadratzahlen von vorhin, sondern jedes neu eingesetzte a/c ergibt eine solche Reihe von nicht mehr ganzen Zahlen, die zusammen ein Feld von Kurvenscharen ergeben (Abb. 4), in dem die Übereinstimmung

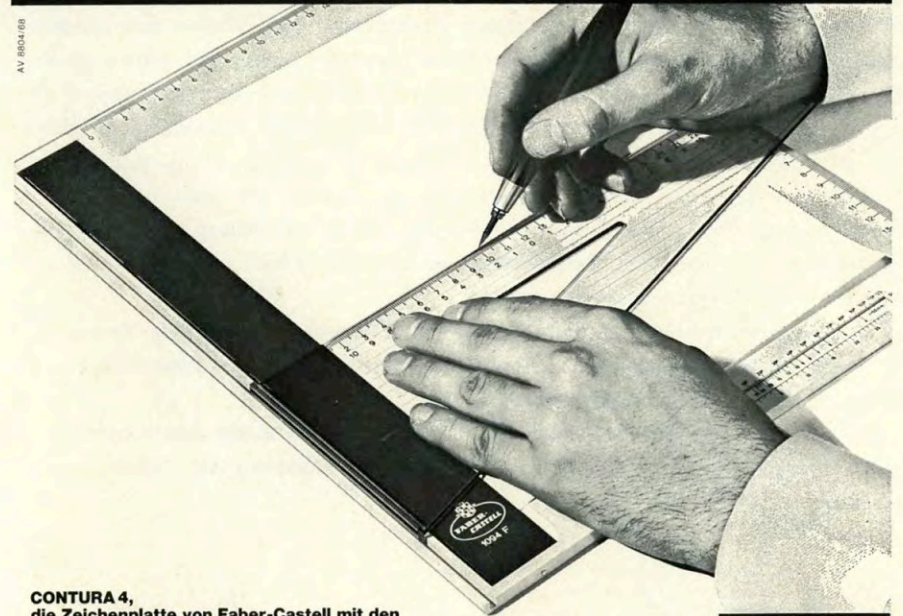
mit der Reihe der d-Werte gesucht werden muß. Auch hier treten wieder die einfachen und niedersten h, k, l-Werte am häufigsten und kräftigsten auf und erleichtern so die Suche, die aber keineswegs mehr immer erfolgreich sein muß. Abbildung 4 zeigt bei c/a = 0,546 eine solche praktische Reihe, bzw. Indizierung. Für das hexagonale System gilt auch noch diese Methode mit einem anderen Diagramm und mit anderen Formeln. Im rhombischen System mit drei verschiedenen Gitterkonstanten ist eine solche graphische Bestimmung allerdings bereits unmöglich und erfordert zusätzliche Daten von Einkristallen her.

Die rein rechnerische Lösung wäre aber auch bereits bei den wirteligen Systemen sehr umständlich und aufwendig, auch wenn man einen Computer zu Hilfe nimmt. Der Rechenstab ist für die Praxis demnach hier unentbehrlich. — Es sei aber hinzugefügt, daß der Maßstab des Rechenstabes selbstverständlich mit dem logarithmischen Maßstab des Diagramms übereinstimmen muß. Die Zeile Q' für das kubische System (= tetragonal mit c/a = 1) muß demnach mit der Quadratskala des Rechenstabes übereinstimmen, erst dann kann man die d-Werte von der Reziprokskala abtragen und die Schnittpunkte mit der Kurvenschar auf dem Diagramm aufsuchen. Wir haben das Diagramm aus einem Handbuch (1) entnommen und, das es in der Originalarbeit nicht mehr zugänglich ist, fotografisch angepaßt. Zu empfehlen ist aber die Neuzeichnung nach den Angaben in den Internationalen Tafeln (2).

Literaturverzeichnis:

- (1) Sagel K., Tabellen zur Röntgenstrukturanalyse, Springer, Berlin, 1958, Tafel I.
- (2) International Tables for X-Ray Crystallography, II, Kynoch Press, Birmingham 1959, 207-212.

neu contura 4



AV 8804/88

CONTURA 4, die Zeichenplatte von Faber-Castell mit den echten Verbesserungen.

Starke Spannschiene aus Stahl mit neuartiger Klemmvorrichtung. Versenkte Spannschiene, dadurch bequemes Zeichnen auf der gesamten Fläche. Die lange Spannschiene erlaubt auch das Einspannen unbeschnittener DIN A4-Zeichenblätter. Maßskalen am rechten und oberen Rand. Maßskalen und Parallel-Hilfslinien auf dem Zeichenwinkel. Sonderskalen für Winkelkonstruktionen, Vieleckkonstruktionen und prozentuale Kreisabschnitte. Rutschfeste Vierpunktauflage.

Die CONTURA 4 besteht aus Geroplast, einem besonders bruchsicheren, elastischen Kunststoff.

Eine Schutzhülle mit Gleitverschluß und eine ausführliche Gebrauchsanleitung liegen jeder Packung bei.

17



ein weltbekannter
Markenname

Bitte fordern Sie ausführliche Gebrauchsanleitung an!



Anschrift: _____

A. W. Faber-Castell 8504 Stein b. Nürnberg Abt. WA/C 4 S

Ausschnitt aus Tafel zur Indizierung kubischer und tetragonaler Gitter

